

8. Nerovnice v součinném tvaru

- NEROVNICE, které lze lineárně-nemnožitelnými úpravami upravit na součin několika činitelů (např. dvojčlenů) na jedné straně nerovnice, na druhé straně musí být nula (anulovaný tvar)

(př.) $(x+4)(x-2) \geq 0$ $x(x-5) < 0$ $x^2(x-3)(x+2)^2 \geq 0$

- VÍCE ZPŮSOBŮ ŘEŠENÍ

1. NP. využitím vlastností součinu čísel (níhodná pro 2 činitele)

$$a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)$$

$$a \cdot b \leq 0 \Leftrightarrow (a \leq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \geq 0 \wedge b \leq 0)$$

2. NP. metoda nulových bodů (níhodná pro více činitelů)

3. NP. graficky (převládá-li kvadratická nerovnice)

další: metody níhodná využitím absolutní hodnoty

Příklady

1) Řeš v $\mathbb{R}$

(L.N.P.) VYUŽIT VLASTNOSTI SOUČINU ČÍSEL (VÝRAZŮ)

a) $(x+2)(2x+3) > 0$

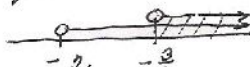
$\sigma = \mathbb{R}, \emptyset = \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (x+2 > 0 \wedge 2x+3 > 0) \vee (x+2 < 0 \wedge 2x+3 < 0)$$

$x > -2$ $2x > -3$

$x > -\frac{3}{2}$

první interval

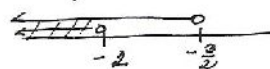


$\mathcal{K}_1 = (-\frac{3}{2}, +\infty)$

$x < -2$ $2x < -3$

$x < -\frac{3}{2}$

první



$\mathcal{K}_2 = (-\infty, -2)$

sjednocení

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$

POZOR NA POŘADÍ BODŮ



$\mathcal{K} = (-\infty, -2) \cup (-\frac{3}{2}, +\infty)$

někdy přičtení pomocí doplnění do mn. R



$\mathcal{K} = \langle -2, -\frac{3}{2} \rangle'$

b) $x^2 - 4 \leq 2 - x$

ANULOVAT!

$\sigma = \mathbb{R}, \emptyset = \mathbb{R}$

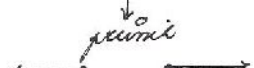
$x^2 + x - 6 \leq 0$

(krátk. koeficient, absolutní koeficient - součet -1, součin -6)

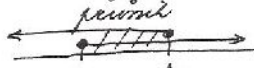
$(x+3)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+3 \leq 0 \wedge x-2 \geq 0) \vee (x+3 \geq 0 \wedge x-2 \leq 0)$$

$(x \leq -3 \wedge x \geq 2) \vee (x \geq -3 \wedge x \leq 2)$



$\mathcal{K}_1 = \emptyset$



$\mathcal{K}_2 = \langle -3, 2 \rangle$

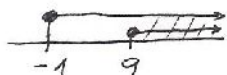
sjednocení

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = \emptyset \cup \langle -3, 2 \rangle = \langle -3, 2 \rangle$

c) $x(x-8) \geq 9$! ANULOVAT - nemí součinový tvar $D=R, O=R$
 $x^2 - 8x - 9 \geq 0$

$(x-9)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$(x-9 \geq 0 \wedge x+1 \geq 0) \vee (x-9 \leq 0 \wedge x+1 \leq 0)$
 $x \geq 9 \quad x \geq -1 \quad x \leq 9 \quad x \leq -1$



$X_1 = \langle 9, +\infty \rangle$



$X_2 = \langle -\infty, -1 \rangle$

$X = X_1 \cup X_2 = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 9, +\infty \rangle = \langle -1, 9 \rangle'_R$



d) $d^2 \leq 5$

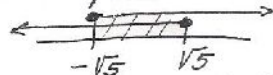
$D=R, O=R$

(1. npr.) $d^2 - 5 \leq 0$

$(d-\sqrt{5})(d+\sqrt{5}) \leq 0$

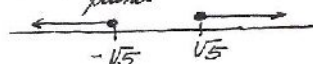
$\Leftrightarrow (d-\sqrt{5} \leq 0 \wedge d+\sqrt{5} \geq 0) \vee (d-\sqrt{5} \geq 0 \wedge d+\sqrt{5} \leq 0)$

$d \leq \sqrt{5} \quad d \geq -\sqrt{5}$



$X_1 = \langle -\sqrt{5}, \sqrt{5} \rangle$

$d \geq \sqrt{5} \quad d \leq -\sqrt{5}$



$X_2 = \emptyset$

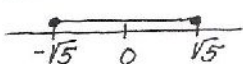
sjednocení

$X = X_1 \cup X_2 = \langle -\sqrt{5}, \sqrt{5} \rangle \cup \emptyset = \langle -\sqrt{5}, \sqrt{5} \rangle$

(2. npr.) - s myšl. vlastností absolutní hodnoty

$d^2 \leq 5 \quad |d|$

$|d| \leq \sqrt{5}$
 $d \geq 0$



$X = \langle -\sqrt{5}, \sqrt{5} \rangle$

$\forall a \in R: \sqrt{a^2} = |a|$

- s využitím absolutní hodnoty

① Řešit v R [a) b) - ma hledat vlastn. součinnu čísel c) d) s myšl. abs. h.]

a) $4x^2 - 3 \leq 0$

$(2x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3}) \leq 0$

$\Leftrightarrow (2x-\sqrt{3} \leq 0 \wedge 2x+\sqrt{3} \geq 0) \vee (2x-\sqrt{3} \geq 0 \wedge 2x+\sqrt{3} \leq 0)$

$2x \leq \sqrt{3}$

$2x \geq -\sqrt{3}$

$2x \geq \sqrt{3}$

$2x \leq -\sqrt{3}$

$x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$X_1 = \langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$



$X_2 = \emptyset$

$X = X_1 \cup X_2 = \langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$

$$b) 2 - x^2 > 0$$

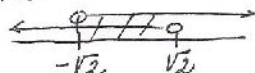
$$\sigma = \mathbb{R}, \varnothing = \mathbb{R}$$

$$(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} - x > 0 \wedge \sqrt{2} + x > 0) \vee (\sqrt{2} - x < 0 \wedge \sqrt{2} + x < 0)$$

$$-x > -\sqrt{2} \quad | \cdot (-1) \quad x > -\sqrt{2}$$

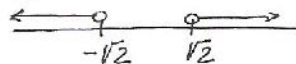
$$! \quad x < \sqrt{2}$$



$$\mathcal{K}_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$-x < -\sqrt{2} \quad | \cdot (-1) \quad x < -\sqrt{2}$$

$$! \quad x > \sqrt{2}$$



$$\mathcal{K}_2 = \emptyset$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$c) 9x^2 > 4$$

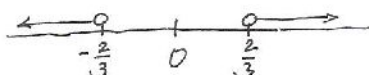
$$\sigma = \mathbb{R}$$

$$\varnothing = \mathbb{R}$$

$$x^2 > \frac{4}{9} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$|x| > \frac{2}{3}$$

$$x \neq 0$$



$$\mathcal{K} = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$$

S VYUŽITÍM
ABSOLUTNÍ HODNOTY

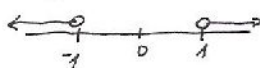
$$d) x^2 \geq 1$$

$$\sigma = \mathbb{R}$$

$$\varnothing = \mathbb{R}$$

$$|x| \geq 1$$

$$x \neq 0$$

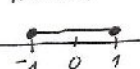


$$\mathcal{K} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

tedy

$$x^2 \leq 1$$

$$|x| \leq 1$$



$$\mathcal{K} = [-1, 1]$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{tedy} \\ 9x^2 - 4 > 0 \\ (3x-2)(3x+2) > 0 \text{ atd.} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 \geq 1 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ (x-1)(x+1) \geq 0 \text{ atd.} \end{array} \right]$$

③ Řešení metodou nulových bodů

$$! a) (1-x)(x+\sqrt{2}) > 0$$

$$\sigma = \mathbb{R}$$

$$\varnothing = \mathbb{R}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{nul. body } 1-x=0 \quad x+\sqrt{2}=0 \\ \quad \quad \quad x=1 \quad \quad \quad x=-\sqrt{2} \end{array} \right]$$



	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 1)$	$(1, +\infty)$
$1-x$	+	+	-
$x+\sqrt{2}$	-	+	+

$$(1-x)(x+\sqrt{2}) > 0$$

$$\mathcal{K} = (-\sqrt{2}, 1)$$

METODA NULOVÝCH BODŮ

1. a) určíme NULOVÉ BODY - body, po jejichž dosažení bude výraz roven 0
b) rozdělíme $\mathbb{R}$ na intervaly s nými nul. b. (tedy krajní body - mezi nimi či na jejich okrajích, rozhodneme podle znaménka $\begin{matrix} \geq 1 \\ \leq 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} < 1 \\ > 1 \end{matrix}$)

2. a) sestavíme tabulku
b) nřkn. nulové body přechodu

3. a) zvolíme lib. číslo x např. $(1, +\infty)$ a dos. na x do každého dvojčlenu a zjistíme znaménko

- b) ostatní znaménka nř přechodů limitních dvojčlenů doplníme tak, aby přechodem přes nulový bod se změnilo znaménko

4. určíme výsledná znaménka nř pomocí intervalů (např. $\oplus \cdot \oplus = \oplus$, $\oplus \cdot \ominus = \ominus$)

5. podle pořadí znaménka nř podle znaménka nř znaménka

$$b) (3-5y)(3+5y) \leq 0$$

$$D=R, \emptyset=R$$

mul. b. $3-5y=0 \quad 3+5y=0$
 $5y=3 \quad 5y=-3$
 $y=\frac{3}{5} \quad y=-\frac{3}{5}$

	$(-\infty, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$	$(\frac{3}{5}, +\infty)$	
$3-5y$	+	+	-	str. 1 $3-5y < 0$
$3+5y$	-	+	+	str. 1 $3+5y > 0$
≤ 0	$\ominus$	$+$	$\ominus$	

$$K = (-\infty, -\frac{3}{5}) \cup (\frac{3}{5}, +\infty)$$

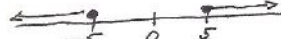
in tomto p. by bylo řešení
 rovností přes k. b.

$$9-25y^2 \leq 0$$

$$9 \leq 25y^2$$

$$y^2 \geq \frac{9}{25}$$

$$|y| \geq \frac{3}{5}$$



$$K = (-\infty, -\frac{3}{5}) \cup (\frac{3}{5}, +\infty)$$

Pozor při
 úpravách

$$9-25y^2 \leq 0$$

$$-25y^2 \leq -9 \quad |(-1)$$

$$(25y^2 \geq 9) \quad | : 25$$

$$y^2 \geq \frac{9}{25}$$

$$|y| \geq \frac{3}{5}$$

$$c) (3-x)(2-x)(1-x)x \geq 0$$

$$D=R, \emptyset=R$$

mul. b. $3-x=0 \quad 2-x=0 \quad 1-x=0 \quad x=0$
 $x=3 \quad x=2 \quad x=1$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$3-x$	+	+	+	+	-
$2-x$	+	+	+	-	-
$1-x$	+	+	-	-	-
x	-	+	+	+	+
≥ 0	-	$\oplus$	-	$\oplus$	-

$$K = (0, 1) \cup (2, 3)$$

$$d) -x^2-5x+6 \geq 0 \quad (L) \quad D=R, \emptyset=R$$

$x^2+5x-6 \leq 0$
 $(x+6)(x-1) \leq 0$
 mul. b. $-6, 1$

	$(-\infty, -6)$	$(-6, 1)$	$(1, +\infty)$
$x+6$	-	+	+
$x-1$	-	-	+
≤ 0	+	$\ominus$	+

$$K = (-6, 1)$$

④ Řešte v R metodou nulových bodů

$$a) k^3 < k^2$$

$$D=R, \emptyset=R$$

$$k^3 - k^2 < 0$$

$$k^2(k-1) < 0$$

$$[k \cdot k(k-1) < 0]$$

mul. b. $k=0, k-1=0$
 $k_0=1$
 dvojnásobný

$$b) x^4 < x^3$$

$$D=R, \emptyset=R$$

$$x^4 - x^3 < 0$$

$$x^3(x-1) < 0$$

mul. b. $0, 1$
 dvojnásobný

VÍCEČASOVNÉ NULOVÉ BODY

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
k^2	+	+	+
$k-1$	-	-	+
≤ 0	$\ominus$	$\ominus$	+

$$K = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
k	-	+	+
k	-	+	+
$k-1$	-	-	+
≤ 0	$\ominus$	$\ominus$	+

$$[x \in R: x^2 \geq 0]$$

- JE-LI NULOVÝ BOD

- sudonásobný $\Rightarrow$ přechodem přes nul. b. se zm. nemění

- lichonásobný $\Rightarrow$ přechodem přes nul. b. se zm. mění (normálně)

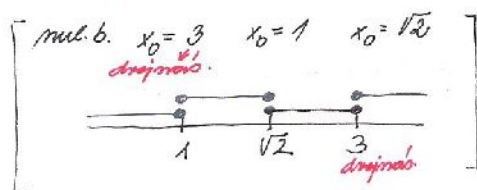
	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x^3	-	+	+
$x-1$	-	-	+
≤ 0	+	$\ominus$	+

$$K = (0, 1)$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	-	+	+
x	-	+	+
x	-	+	+
$x-1$	-	-	+
≤ 0	+	$\ominus$	+

$$c) (3-x)^2(x-1)(\sqrt{2}-x) \geq 0$$

$$\sigma = \mathbb{R}, \emptyset = \mathbb{R}$$



	$(-\infty, 1)$	$(1, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, 3)$	$(3, +\infty)$
$(3-x)^2$	+	+	+	+
$x-1$	-	+	+	+
$\sqrt{2}-x$	+	+	-	-
společně ≥ 0	-	+	-	-

$$\mathcal{K} = \langle 1, \sqrt{2} \rangle \cup \{3\}$$

$$x=3 \text{ je součin } = 0$$

- V PŘÍPADĚ VÍCE NUL. B. JE NUTNO PŘI $\geq$, $\leq$ ZAHNOUT SAMOSTATNĚ NULOVÉ BODY (SPĚNUJÍ =)

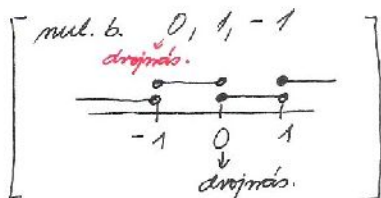
$$d) x^4 \leq x^2$$

$$\sigma = \mathbb{R}, \emptyset = \mathbb{R}$$

$$x^4 - x^2 \leq 0$$

$$x^2(x^2 - 1) \leq 0$$

$$x^2(x-1)(x+1) \leq 0$$



	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x^2	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	+
$x+1$	-	+	+	+
společně ≤ 0	+	-	-	+

$$\mathcal{K} = \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle = \langle -1, 1 \rangle$$

tedy $x^4 \geq x^2$
 $x^2(x-1)(x+1) \geq 0 \rightarrow$ stejný postup,
 ale $\mathcal{K} = (-\infty, -1) \cup \langle 1, +\infty \rangle \cup \{0\}$

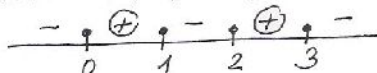
⑤ Řešit metodou nul. bodů - křivkami

- ZKRÁCENÝ ZÁPIS METODY NULOVÝCH BODŮ

$$a) (3-x)(2-x)(1-x) \geq 0 \quad (\text{viz př. 3c})$$

$$\sigma = \mathbb{R}, \emptyset = \mathbb{R}$$

mul. b. $3, 2, 1, 0$



$$\text{Nk. 4: } (3-4)(2-4)(1-4) \cdot 4 \leq 0$$

$$\mathcal{K} = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$$

$$b) x^4 \geq x^2$$

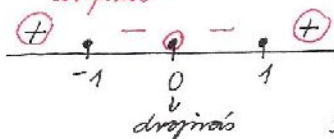
$$\sigma = \mathbb{R}, \emptyset = \mathbb{R}$$

$$x^4 - x^2 \geq 0$$

$$x^2(x^2 - 1) \geq 0$$

$$x^2(x-1)(x+1) \geq 0$$

mul. b. $0, 1, -1$
drojina



$$\text{Nk. 2: } 2^2(2-1)(2+1) > 0$$

PŘECHODEM PŘES SUDONÁSOBNÝ NUL. BOD NEHĚNÍME ZNAČENÍ
 - N. PŘ. $\leq 0, \geq 0$ VČETNĚ VŠECH NUL. BODŮ (palející dr. 8)

$$\mathcal{K} = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup \langle 1, +\infty \rangle$$

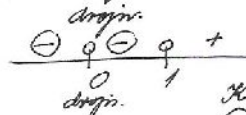
$$c) x^3 < x^2$$

$$\sigma = \mathbb{R}, \emptyset = \mathbb{R}$$

$$x^3 - x^2 < 0$$

$$x^2(x-1) < 0$$

mul. b. $0, 1$
drojina



$$\text{Nk. 1: } 2^2(2-1) > 0$$

$$\mathcal{K} = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$$

6) Řešit metodou nul. bodů (tabulkou i kreslící)

a) $(4x^2 - 3)(4 - 5x)(x - 2) < 0$ $D = R$

$(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})(4 - 5x)(x - 2) < 0$

mul. b. $2x - \sqrt{3} = 0$ $2x + \sqrt{3} = 0$ $4 - 5x = 0$ $x - 2 = 0$
 $2x = \sqrt{3}$ $2x = -\sqrt{3}$ $-5x = -4$ $x_0 = 2$
 $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x_0 = \frac{4}{5}$ $x_0 = 2$ PRŮBĚ NA PORADÍ BODŮ

- TABULKA

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4}{5})$	$(\frac{4}{5}, 2)$	$(2, +\infty)$	
$2x - \sqrt{3}$	-	-	0	+	+	nr. 1: $2x - \sqrt{3} > 0$
$2x + \sqrt{3}$	-	0	+	+	+	$2x + \sqrt{3} > 0$
$4 - 5x$	+	+	+	0	-	$4 - 5x < 0$
$x - 2$	-	-	-	-	0	$x - 2 > 0$
výsledek	⊖	+	⊖	+	⊖	

$\mathcal{K} = (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4}{5}) \cup (2, +\infty)$

- ZKRÁCENÉ:

$(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})(4 - 5x)(x - 2) < 0$

mul. b. $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_0 = \frac{4}{5}$, $x_0 = 2$

⊖ 0 + 0 ⊖ 0 + 0 ⊖ nr. 1: $3 \in (2, +\infty)$
 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{4}{5}$ 2 (2.3 - \sqrt{3})(2.3 + \sqrt{3})(4 - 5.3)(3 - 2) < 0

$\mathcal{K} = (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4}{5}) \cup (2, +\infty)$

b) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 \leq 0$ $D = R$

$2x - x^2 \leq 0$

$x(2 - x) \leq 0$

mul. b. 0, 2

- TABULKA

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
x	-	+	nr. 1: $x > 0$
$2 - x$	+	+	nr. 2: $2 - x < 0$
výsledek	⊖	+	⊖

$\mathcal{K} = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

- ZKRÁCENÉ

⊖ 0 + 0 ⊖ nr. 1: $3(2 - 3) < 0$
 0 2 $\mathcal{K} = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

c) $x^5 > x^4$

$x^5 - x^4 > 0$

$x^4(x - 1) > 0$

mul. b. 0, 1 dyšenos.

- TABULKA

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x^4	+	+	nr. 1: $x^4 > 0$
$x - 1$	-	-	nr. 2: $x - 1 > 0$
	-	-	+

$\mathcal{K} = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

- ZKRÁCENÉ

- 0 - 0 + nr. 1: $2^4(2 - 1) > 0$
 0 1 $\mathcal{K} = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$